物理問題　I

(1)

ア $\frac{(1+e)m_3}{m_1+m_3}v_0$　イ $\frac{m_3-em_1}{m_1+m_3}v_0$　ウ $-\frac{\mu_1(m_1+m_2)+\mu_2 m_2}{m_1}g$　エ $\mu_2 g$　オ $-\mu_1 g$

解説

ア・イ

$m\Delta v = F\Delta t$ より，$F = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$ であり，衝突にかかる時間 Δt が十分短いこととから，

F の大きさは十分大きいことが容易に想像できる。この F のように，物体間の打撃や衝突などによって物体間に生じる瞬間的な大きい力を撃力という。

重力や摩擦力などは撃力に比べ無視できるほど小さいので，

たとえ，物体系にそのような外力が働いていても，

物体間の打撃や衝突など撃力が生じた場合は，

その直前と直後で物体系の運動量が保存されるとしてよい。

したがって，問題では衝突時における動摩擦力の力積は無視してよいことになるので，

衝突の直前と直後で物体 3 と物体 1 の運動量の和が保存されるとしてよい。

よって，物体 3 の速度を v_3 とすると，$m_3 v_0 = m_1 v + m_3 v_3$　・・・①

また，その衝突のはね返り係数が e だから，$\frac{v_3 - v}{v_0 - 0} = -e$ より，$v_3 = v - ev_0$　・・・②

①，②より，$v = \frac{(1+e)m_3}{m_1+m_3}v_0$　・・・ア　$v_3 = \frac{m_3 - em_1}{m_1+m_3}v_0$　・・・イ

ウ・エ・オ

物体 1 の加速度 a_1

物体 1 は，物体 2 からの大きさ $\mu_2 m_2 g$ の動摩擦力と床からの大きさ $\mu_1(m_1+m_2)g$ の動摩擦力を，その運動が妨げられる向き，すなわち負の向きに受けるから，

その運動方程式は $m_1 a_1 = -\mu_1(m_1+m_2)g - \mu_2 m_2 g$

$\therefore a_1 = -\frac{\mu_1(m_1+m_2)+\mu_2 m_2}{m_1}g$　・・・ウ

物体 2 の加速度 a_2

物体 1 が物体 2 かる受ける動摩擦力は $-\mu_2 m_2 g$ だから，物体 2 が物体 1 から受けるそれは $\mu_2 m_2 g$ である。

よって，物体 2 の運動方程式は $m_2 a_2 = \mu_2 m_2 g$　$\therefore a_2 = \mu_2 g$　・・・エ

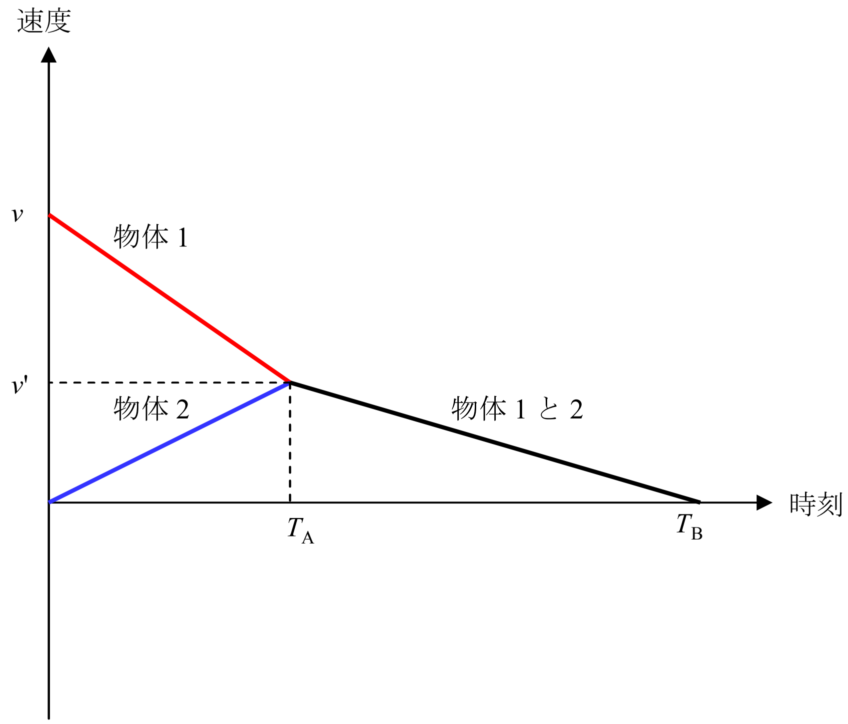
物体 1 と物体 2 が一体となってからの加速度 a'

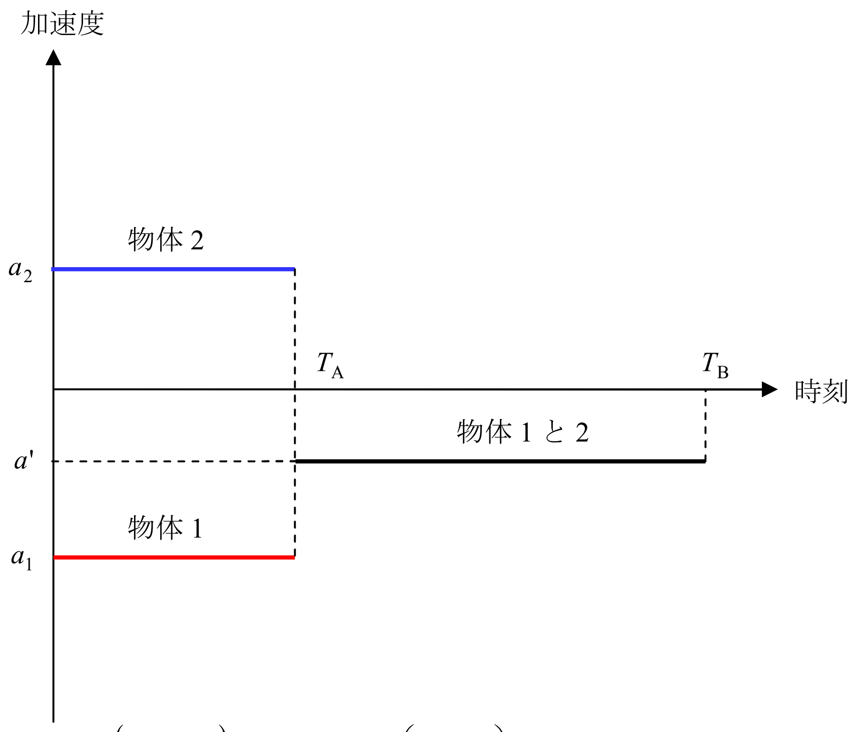
物体 1 と物体 2 を一体として扱うと，$-\mu(m_1+m_2)g$ の動摩擦力を受けるから，

その運動方程式は $(m_1+m_2)a' = -\mu_1(m_1+m_2)g$　$\therefore a' = -\mu_1 g$　・・・オ

問 1

(a)





$$|a_1| = \frac{\mu_1(m_1+m_2)+\mu_2 m_2}{m_1}g = \mu_1\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)g + \frac{\mu_2 m_2}{m_1}g > \mu_1 g = |a'|$$ より，

速度-時刻グラフの「物体 1」の直線の傾きは「物体 1 と 2」のそれより急勾配である。

カ $\dfrac{v}{a_2 - a_1}$ キ $\dfrac{a_2}{a_2 - a_1}v$ ク $\left(1-\dfrac{a_2}{a'}\right)\dfrac{v}{a_2 - a_1}$ ケ $\dfrac{m_1 v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}$

コ $\dfrac{m_1 v}{\mu_1(m_1+m_2)g}$ サ $\dfrac{m_1 v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g} \le l_1 - l_2$

シ $\dfrac{m_1 v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}\left\{1+\dfrac{\mu_2 m_1}{\mu_1(m_1+m_2)}\right\}$

解説

カ・キ

時刻T_Aにおいて物体1と物体2の相対速度が0となるから，

時刻T_Aにおける物体2の速度＝時刻T_Aにおける物体1の速度＝v'が成り立つ。

これと，$0 \le t \le T_\mathrm{A}$における物体1の速度は$v + a_1 t$だから，

時刻T_Aにおける速度$v' = v + a_1 T_\mathrm{A}$ ・・・③

また，物体2の速度は$a_2 t$だから，時刻T_Aにおける速度$v' = a_2 T_\mathrm{A}$ ・・・④

③，④より，$T_\mathrm{A} = \dfrac{v}{a_2 - a_1}$ ・・・カ $\dfrac{a_2}{a_2 - a_1}v$ ・・・キ

ク

v'になった後，加速度a'で減速し，$T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}$後に静止するから，

$v' + a'(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}) = 0$

これと$v' = a_2 T_\mathrm{A}$より，$a_2 T_\mathrm{A} + a'(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}) = 0$ $\therefore T_\mathrm{B} = \left(1-\dfrac{a_2}{a'}\right)T_\mathrm{A}$

$T_\mathrm{A} = \dfrac{v}{a_2 - a_1}$だから，$T_\mathrm{B} = \left(1-\dfrac{a_2}{a'}\right)\dfrac{v}{a_2 - a_1}$

ケ

$a_1 = -\dfrac{\mu_1(m_1+m_2)+\mu_2 m_2}{m_1}g$，$a_2 = \mu_2 g$より，

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= \mu_2 g - \left\{-\dfrac{\mu_1(m_1+m_2)+\mu_2 m_2}{m_1}g\right\} \\ &= \dfrac{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}{m_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore T_\mathrm{A} &= \dfrac{v}{a_2 - a_1} \\ &= \dfrac{m_1 v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{コ}}$

$$a_2 - a_1 = \frac{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}{m_1},\quad \frac{a_2}{a'} = \frac{\mu_2 g}{-\mu_1 g} = -\frac{\mu_2}{\mu_1} \text{ より，}$$

$$\begin{aligned}T_\mathrm{B} &= \left(1-\frac{a_2}{a'}\right)\frac{v}{a_2-a_1}\\ &= \left(1+\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\frac{m_1 v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}\\ &= \frac{m_1 v}{\mu_1(m_1+m_2)g}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{サ}}$

時刻 0 から T_A までにおいて，

物体 1 から見た物体 2 の加速度は $a_2 - a_1$

物体 2 から見た物体 1 の速度は $-v$ から 0 に変化する。

よって，物体 2 から見た物体 1 の変位を Δx とすると，

$$0-(-v)^2 = 2(a_2-a_1)\Delta x \quad \therefore -\frac{v^2}{2(a_2-a_1)} = \Delta x$$

これと $a_2 - a_1 = \dfrac{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}{m_1} > 0$ より， $|\Delta x| = \dfrac{m_1 v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}$

物体 2 が物体 1 の上面からはみ出さないためには $|\Delta x| \le l_1 - l_2$ であればよいから，

$$\frac{m_1 v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g} \le l_1 - l_2$$

$\boxed{\text{シ}}$

解法 1

問 1 の物体 1 についての v - t グラフの面積より，

$$\begin{aligned}x_\mathrm{B} &= \frac{1}{2}(v+v')\cdot T_\mathrm{A} + \frac{1}{2}v'(T_\mathrm{B}-T_\mathrm{A})\\ &= \frac{1}{2}(vT_\mathrm{A} + v'T_\mathrm{B})\end{aligned}$$

$$T_\mathrm{A} = \frac{m_1 v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g},\quad T_\mathrm{B} = \frac{m_1 v}{\mu_1(m_1+m_2)g},\quad v' = \frac{a_2}{a_2-a_1}v = \frac{\mu_2 m_1 v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)} \text{ より，}$$

$$\begin{aligned}vT_\mathrm{A} + v'T_\mathrm{B} &= \frac{m_1 v^2}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g} + \frac{\mu_2 {m_1}^2 v^2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)^2 g}\\ &= \frac{m_1 v^2}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}\left\{1+\frac{\mu_2 m_1}{\mu_1(m_1+m_2)}\right\}\end{aligned}$$

よって， $x_\mathrm{B} = \dfrac{m_1 v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}\left\{1+\dfrac{\mu_2 m_1}{\mu_1(m_1+m_2)}\right\}$

解法 2

物体 2 は物体 1 の位置 x_B より $-|\Delta x|$ の位置で静止することと

問 1 の物体 2 についての v-t グラフの面積から，

$$x_B - |\Delta x| = \frac{1}{2}T_B v' \quad \therefore x_B = |\Delta x| + \frac{1}{2}T_B v'$$

これと $|\Delta x| = \dfrac{m_1 v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}$， $T_B = \dfrac{m_1 v}{\mu_1(m_1+m_2)g}$， $v' = \dfrac{\mu_2 m_1 v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)}$ より，

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{m_1 v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 v}{\mu_1(m_1+m_2)g}\cdot\frac{\mu_2 m_1 v}{(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)} \\ &= \frac{m_1 v^2}{2(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g}\left\{1+\frac{\mu_2 m_1}{\mu_1(m_1+m_2)}\right\} \end{aligned}$$

(2)

ス $\frac{1}{2}m_1 v^2$　セ $\mu_1(m_1+m_2)gx_B$　ソ $\mu_2 m_2 g(x_1 - x_2)$

解説

セ

物体 1 は床から大きさ $\mu_1(m_1+m_2)g$ の動摩擦力を距離 x_B に渡って受けるから，

$E_1 = \mu_1(m_1+m_2)gx_B$

ソ

物体 2 は物体 1 に対し負方向に動くから， $x_2 < x_1$ より，

動摩擦力が働いた距離は $x_1 - x_2$

これと物体 1 と物体 2 の間の動摩擦力の大きさが $\mu_2 m_2 g$ であることから，

$E_2 = \mu_2 m_2 g(x_1 - x_2)$

問 2

物体 2 の運動量変化＝物体 2 が物体 1 から受ける動摩擦力の力積

物体 1 の運動量変化＝物体 1 が床から受ける動摩擦力の力積＋物体 1 が物体 2 から受ける動摩擦力の力積

ここで，物体 1 と物体 2 の間の動摩擦力は作用反作用の関係だから，

物体 1 の運動量変化と物体 2 の運動量変化の和をとると，

物体 1 と物体 2 の間の動摩擦力の力積の和が 0 になる。

よって，

物体 1 と物体 2 からなる系の運動量変化＝物体 1 が床から受ける動摩擦力の力積

したがって，この系は床からの動摩擦力のみを受けて運動していることになる。

ゆえに，時刻 T_B は動摩擦係数 μ_1 に依存するものの，動摩擦係数 μ_2 には依存しない。

物理問題 Ⅱ

イ $\frac{1}{2}\varepsilon_r(\varepsilon_r-1)C_0{V_0}^2$ ロ $\varepsilon_r V_0$ ハ $\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}V_0$ ニ $\frac{{\varepsilon_r}^2}{\varepsilon_r+1}C_0V_0$ ホ $\frac{{\varepsilon_r}^2}{2(\varepsilon_r+1)}C_0{V_0}^2$

ヘ $\frac{{\varepsilon_r}^2}{\varepsilon_r+1}V_0$ ト $\{\varepsilon_r-(\varepsilon_r-1)x\}C_0$ チ $\frac{V}{R}\Delta t$ リ $(\varepsilon_r-1)C_0\Delta x$

解説

イ

操作(i)でコンデンサーA に蓄えられた電気量を Q とすると $Q=\varepsilon_r C_0 V_0$ であり，
スイッチ S_1 を開くと Q が保存されるから，

誘電体を抜きとる前と抜き取った後の静電エネルギーはそれぞれ $\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{\varepsilon_r C_0}$， $\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C_0}$

よって，誘電体を抜くのに要するエネルギーを E とすると，

エネルギー保存則より， $\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{\varepsilon_r C_0}+E=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C_0}$

$$\therefore E=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{{\varepsilon_r}^2{C_0}^2{V_0}^2}{C_0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\varepsilon_r(\varepsilon_r-1)C_0{V_0}^2$$

ロ

誘電体を抜き取る前 $V_0=\frac{Q}{\varepsilon_r C_0}$ （$Q=\varepsilon_r C_0 V_0$）

誘電体を抜き取った後の電圧を V とすると， $V=\frac{Q}{C_0}$

$$\therefore V=\frac{Q}{C_0}=\varepsilon_r V_0$$

ハ

コンデンサーA とコンデンサーB の並列回路になる。
電気量 $Q=\varepsilon_r C_0 V_0$ が保存される。
コンデンサーA の電気容量は C_0，コンデンサーB の電気容量は $\varepsilon_r C_0$
より，

求める電圧を V_B とすると， $C_0V_B+\varepsilon_r C_0 V_B=\varepsilon_r C_0 V_0$ $\therefore V_B=\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}V_0$

ニ

$$\varepsilon_r C_0 V_\mathrm{B} = \varepsilon_r C_0 \cdot \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} V_0 = \frac{{\varepsilon_r}^2}{\varepsilon_r + 1} C_0 V_0$$

ホ

$$\frac{1}{2} C_0 {V_\mathrm{B}}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 {V_\mathrm{B}}^2 = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_r) C_0 {V_\mathrm{B}}^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_r + 1) C_0 \cdot \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} V_0 \right)^2 = \frac{{\varepsilon_r}^2}{2(\varepsilon_r + 1)} C_0 {V_0}^2$$

ヘ

スイッチ S_2 を開いてから抜き取るから，

抜き取る前のコンデンサーB の電気量を Q_B とすると， Q_B が保存される。

したがって，誘電体を抜き取る前 $V_\mathrm{B} = \dfrac{Q_\mathrm{B}}{\varepsilon_r C_0}$

誘電体を抜き取った後の電圧を V とすると， $V = \dfrac{Q_\mathrm{B}}{C_0}$ より， $V = \varepsilon_r V_\mathrm{B}$

これと $V_\mathrm{B} = \dfrac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} V_0$ より， $V = \dfrac{Q}{C_0} = \dfrac{{\varepsilon_r}^2}{\varepsilon_r + 1} V_0$

ト

$$(1 - x)\varepsilon_r C_0 + x C_0 = \{\varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1)x\} C_0$$

チ

電圧が V のとき $I = \dfrac{V}{R}$ だから，コンデンサーB の電荷は $\dfrac{V}{R}\Delta t$ だけ減少する。

リ

$$\{(1 - x)\varepsilon_r C_0 + x C_0\} - \{(1 - x - \Delta x)\varepsilon_r C_0 + (x + \Delta x) C_0\} = (\varepsilon_r - 1) C_0 \Delta x$$

問 1

操作(i)の後のコンデンサー回路の孤立部分に保存される電荷は両手順で等しく。

しかも元の手順の操作(iii)と逆の手順の操作(ii)のコンデンサーの回路は同じである。

よって，どちらの手順をとっても両コンデンサーの電圧と電荷量は同じになる。

問 2

スイッチ S_2 を閉じる前の両コンデンサー，すなわち電荷が移動する前の両コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーは操作(ii)で誘電体を抜き取ったコンデンサーA（電気容量 C_0，電圧 $\varepsilon_r V_0$）に蓄えられた静電エネルギーと等しいから $\frac{1}{2}C_0\varepsilon_r{}^2 V_0{}^2$

また，電荷が移動した後，すなわち操作(iii)でスイッチ S_2 を閉じて十分時間が経過したときの両コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーは，$\boxed{\text{ホ}}$より，$\frac{\varepsilon_r{}^2}{2(\varepsilon_r+1)}C_0V_0{}^2$

よって，

$$\text{失われた静電エネルギー} = \frac{1}{2}C_0\varepsilon_r{}^2V_0{}^2 - \frac{\varepsilon_r{}^2}{2(\varepsilon_r+1)}C_0V_0{}^2 = \frac{\varepsilon_r{}^2}{2(\varepsilon_r+1)}C_0V_0{}^2$$

これが発生したジュール熱 I^2rT と等しいから，$I^2rT = \frac{\varepsilon_r{}^3}{2(\varepsilon_r+1)}C_0V_0{}^2$ ・・・①

また，$IT = \frac{\varepsilon_r{}^2}{\varepsilon_r+1}C_0V_0$ より，$I = \frac{1}{T}\frac{\varepsilon_r{}^2}{\varepsilon_r+1}C_0V_0$ ・・・②

①，②より，$\left(\frac{1}{T}\frac{\varepsilon_r{}^2}{\varepsilon_r+1}C_0V_0\right)^2 rT = \frac{\varepsilon_r{}^2}{2(\varepsilon_r+1)}C_0V_0{}^2 \quad \therefore T = \frac{2\varepsilon_r rC_0}{\varepsilon_r+1}$ ・・・(答)

問 3

解法 1：定量的解法（数列の極限で解く）

n 回目の操作(iii) でのコンデンサーB の電荷量を Q_n とする。

$n+1$ 回目の操作(i) でコンデンサーA の電荷量は $\varepsilon_r C_0V_0$ となるから，

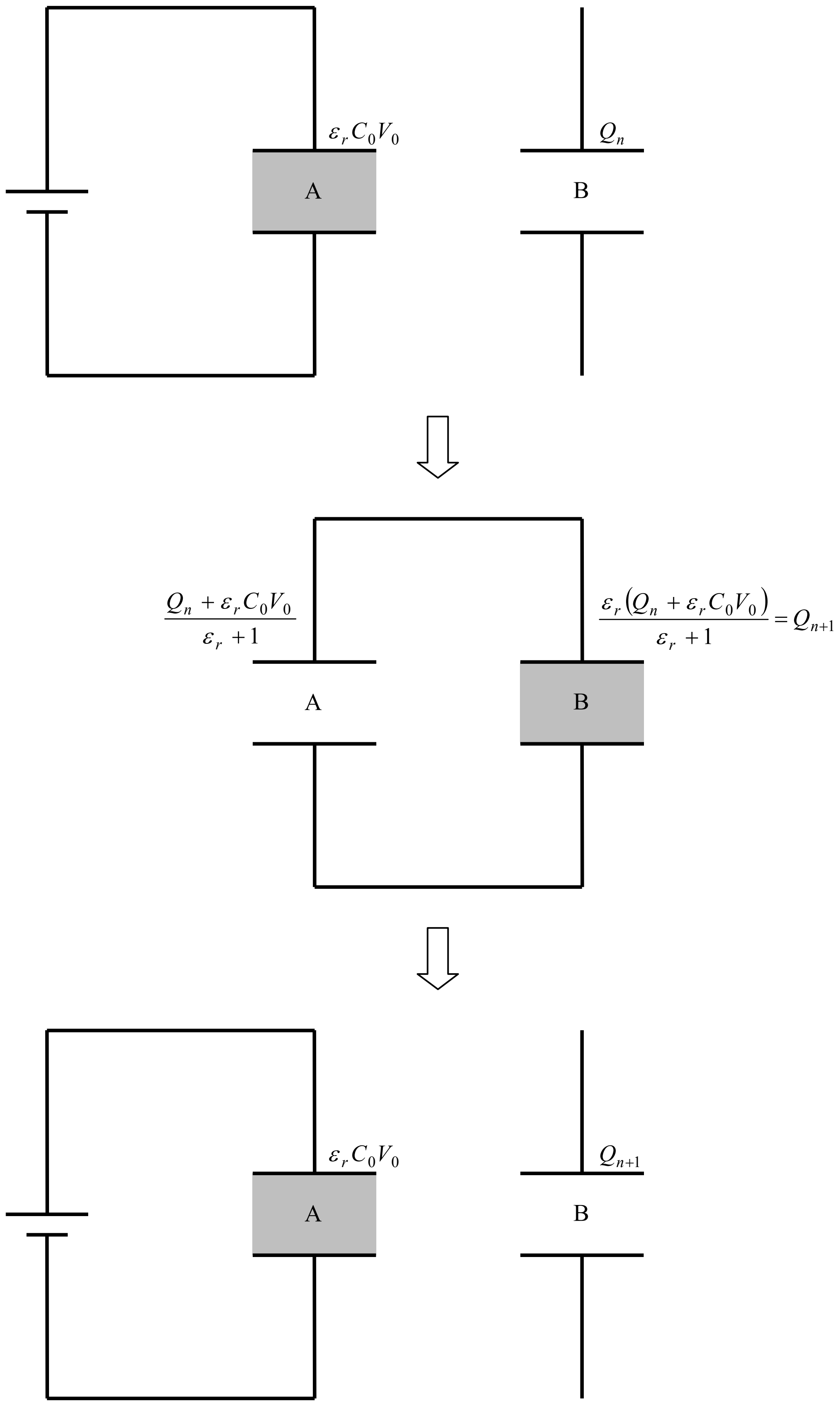
$n+1$ 回目の操作(iii) でのコンデンサーA と B の電荷量の和は $Q_n + \varepsilon_r C_0V_0$ である。

これと $n+1$ 回目の操作(iii) でのコンデンサーA と B の電気容量比が $1:\varepsilon_r$ であることから，

$$Q_{n+1} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}(Q_n + \varepsilon_r C_0V_0) \quad \therefore \lim_{n\to\infty}Q_{n+1} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}\lim_{n\to\infty}Q_n + \frac{\varepsilon_r{}^2}{\varepsilon_r+1}C_0V_0$$

これと $\lim_{n\to\infty}Q_{n+1} = \lim_{n\to\infty}Q_n = Q_0$ より，$Q_0 = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}Q_0 + \frac{\varepsilon_r{}^2}{\varepsilon_r+1}C_0V_0$

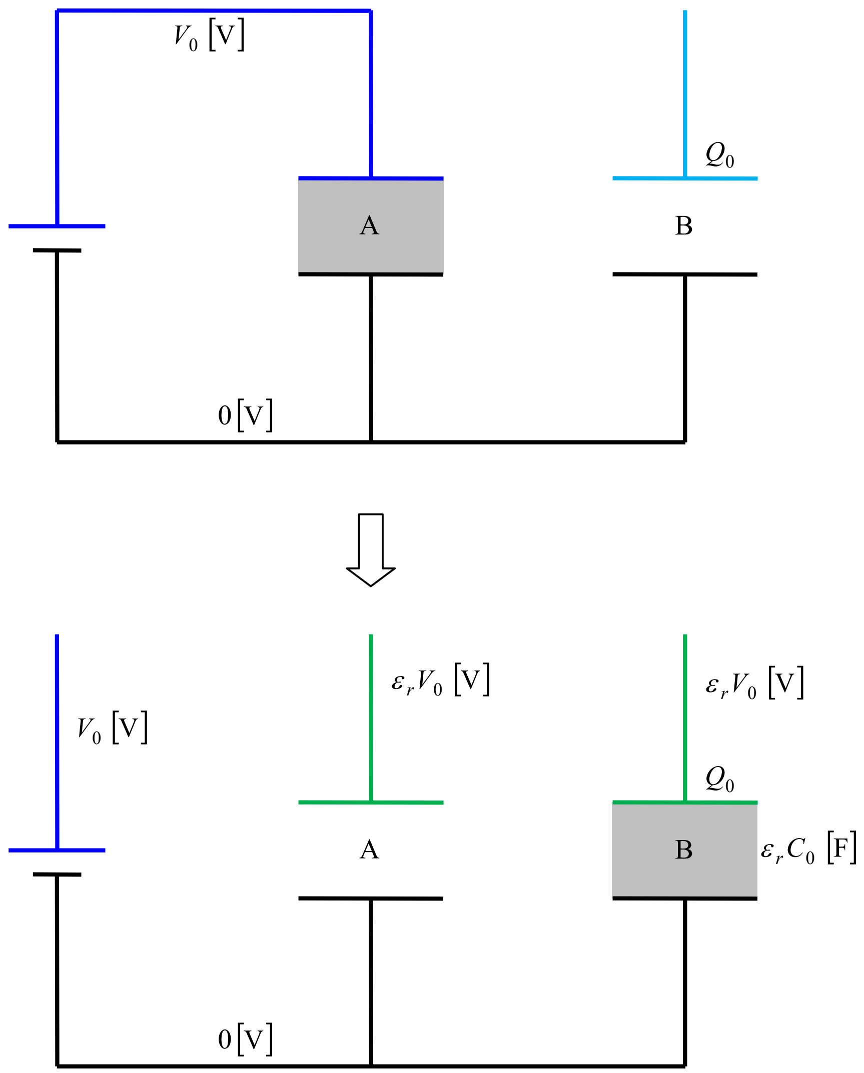
$\therefore Q_0 = \varepsilon_r{}^2 C_0V_0$ ・・・(答)


$\varepsilon_r C_0 V_0$
Q_n
A
B
$\dfrac{Q_n + \varepsilon_r C_0 V_0}{\varepsilon_r + 1}$
$\dfrac{\varepsilon_r (Q_n + \varepsilon_r C_0 V_0)}{\varepsilon_r + 1} = Q_{n+1}$
A
B
$\varepsilon_r C_0 V_0$
Q_{n+1}
A
B

解法 2：どちらかというと定性的解法（電荷が移動しない ⇔ 等電位）

電池の負極と接続しているコンデンサーA とコンデンサーB の極板は等電位であり，
これを 0V とすると，操作(ii)のコンデンサーA の高電位側の極板の電位は $\varepsilon_r V_0$ である。
また，電荷の移動が起こらないこととコンデンサーA の高電位側の極板とコンデンサーB の高電位側の極板の電位が等しいことは同値である。
よって，コンデンサーB の高電位側の極板の電位も $\varepsilon_r V_0$ である。
これとコンデンサーB の電気容量が $\varepsilon_r C_0$ であることから，

$Q_0 = \varepsilon_r C_0 \cdot \varepsilon_r V_0 = \varepsilon_r{}^2 C_0 V_0$ ・・・(答)



問 4

$\Delta C = (\varepsilon_r - 1)C_0 \Delta x$ で電圧が V に保たれるから，電荷量の変化を ΔQ とすると，

$\Delta Q = \Delta C \cdot V$ より，$\Delta Q = (\varepsilon_r - 1)C_0 \Delta x \cdot V$

よって，$\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = (\varepsilon_r - 1)C_0 \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \cdot V$

ここで，$\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ は電流コンデンサーB の正極板から負極板へ微小時間 Δt に移動する電荷量，

すなわち回路を流れる電流を表すから $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{V}{R}$

ゆえに，$\dfrac{V}{R} = (\varepsilon_r - 1)C_0 \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \cdot V$ より，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{1}{(\varepsilon_r - 1)C_0 R}$ ・・・(答)

t と x の関係式は，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{1}{(\varepsilon_r - 1)C_0 R}$，$t = 0$ のとき $x = 0$ より，$x = \dfrac{1}{(\varepsilon_r - 1)C_0 R} t$

これと $0 \le x \le 1$ より，$0 \le t \le (\varepsilon_r - 1)C_0 R$

よって，電圧を一定値 V に保つことができる時間は $(\varepsilon_r - 1)C_0 R$ ・・・(答)

物理問題　Ⅲ

(1)

$\boxed{あ}$ $v_\mathrm{A}-v_\mathrm{B}$　$\boxed{い}$ at　$\boxed{う}$ $\dfrac{h}{c}$　$\boxed{え}$ $\dfrac{ah}{c^2}$

解説

$\boxed{あ}$

光源の速度は光源が光を発したときの箱の速度だから，その速度は v_A

検出器の速度はその光を検出器がとらえるときの箱の速度だから，その速度は v_B

また， $v_\mathrm{A}>0,\ v_\mathrm{B}>0$ より，

光源は検出器に近づく向き，検出器は光源から遠ざかる向きに運動している。

よって，ドップラー効果の式は

$$
\begin{aligned}
f_\mathrm{B}&=\frac{c-v_\mathrm{B}}{c-v_\mathrm{A}}f_\mathrm{A}\\
&=\frac{1-\dfrac{v_\mathrm{B}}{c}}{1-\dfrac{v_\mathrm{A}}{c}}f_\mathrm{A}\\
&=\left(1+\frac{v_\mathrm{A}}{c}\right)\left\{1+\left(-\frac{v_\mathrm{B}}{c}\right)\right\}f_\mathrm{A}\qquad\left(\because\left|\frac{v_\mathrm{A}}{c}\right|<<1\right)\\
&=\left(1+\frac{v_\mathrm{A}}{c}-\frac{v_\mathrm{B}}{c}-\frac{v_\mathrm{A}v_\mathrm{B}}{c^2}\right)f_\mathrm{A}\\
&=\left(1+\frac{v_\mathrm{A}-v_\mathrm{B}}{c}\right)f_\mathrm{A}\qquad\Leftarrow\ \left|\frac{v_\mathrm{A}}{c}\right|<<1,\ \left|\frac{v_\mathrm{B}}{c}\right|<<1\text{ だから，}\ \frac{v_\mathrm{A}v_\mathrm{B}}{c^2}=0\text{ としてよい。}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\frac{f_\mathrm{B}}{f_\mathrm{A}}=1+\frac{v_\mathrm{A}-v_\mathrm{B}}{c}$$

$\boxed{い}$

$$a=\frac{v_\mathrm{B}-v_\mathrm{A}}{t}\qquad\therefore v_\mathrm{B}-v_\mathrm{A}=at$$

または,

$v_\mathrm{B}=v_\mathrm{A}+at$ より， $v_\mathrm{B}-v_\mathrm{A}=at$

$\boxed{え}$

f_A と f_B は単位時間のパルスの数,

Δt_A と Δt_B はパルスの周期だから,

$f_\mathrm{A}=\dfrac{1}{\Delta t_\mathrm{A}}$， $f_\mathrm{B}=\dfrac{1}{\Delta t_\mathrm{B}}$ より,

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=\frac{f_{\mathrm{A}}}{f_{\mathrm{B}}}$$
$$=\frac{1}{\frac{f_{\mathrm{B}}}{f_{\mathrm{A}}}}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{ah}{c^2}}$$
$$=1+\frac{ah}{c^2}\qquad\left(\because\left|\frac{ah}{c^2}\right|<<1\right)$$

補足

$$\frac{f_{\mathrm{B}}}{f_{\mathrm{A}}}=1+\frac{v_{\mathrm{A}}-v_{\mathrm{B}}}{c}$$
$$=1-\frac{v_{\mathrm{B}}-v_{\mathrm{A}}}{c}$$
$$=1-\frac{at}{c}$$
$$=1-\frac{a\cdot\frac{h}{c}}{c}$$
$$=1-\frac{ah}{c^2}$$

(2)

$\boxed{\text{お}}$ 慣性 $\boxed{\text{か}}$ $-a$ $\boxed{\text{き}}$ 地球の中心へ向かう向き $\boxed{\text{く}}$ $\frac{GM}{r^2}$ $\boxed{\text{け}}$ $\frac{\beta h}{c^2}$

解説

$\boxed{\text{か}}$

宇宙空間は無重力状態だから，見かけの重力加速度は $-a$ である。

$\boxed{\text{け}}$

問 1 の文脈から，

光源 A から出た 2 つのパルスの時間間隔を Δt_{A}，

それらが検出器 B に到達するときの時間間隔を Δt_{B} として，

$\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}$ を求めさせる問いである。

等価原理より，図 1 において加速度が β の場合と同等に扱えるから，

$\boxed{\text{え}}$ の $\frac{ah}{c^2}$ の a を β に置き換えるだけでよい。

等価原理

地表の静止観測者が見れば，自由落下中の系は重力加速度を受けているので非慣性系であるが，自由落下中の系の静止観測者が見れば，重力のみ受けて運動している物体は静止状態を含め全て等速直線運動しているから慣性系であり，自分は静止していると認識しているので，地表こそが重力を慣性力とする非慣性系ということになる。

つまり，重力と慣性力の区別がなくなってしまう。

このように重力の効果と慣性力の効果を同等とする仮定を等価原理という。

たとえば，無重力の宇宙空間で加速度運動するロケット内に生じる慣性力は，

等価原理により，重力と同等と見なすことができる。

尚，等価原理の基礎をなすのは慣性質量と重力質量の同等性である。

慣性質量：運動方程式 $F=ma$ で定義される質量 $m=\dfrac{F}{a}$

重力質量：万有引力の法則 $F=\dfrac{GMm}{r^2}$ で定義される質量 $m=\dfrac{Fr^2}{GM}$

定義の上で両質量は異なるが，実験の上では，同等である。

問 1

B から A に光を送る場合は，

Δt_{B} が B からパルスを発する周期，Δt_{A} がパルスを検出する周期となる。

また，A から B に光を送る場合と光源と検出器の関係が逆になる。

よって，A から B に光を送る場合のドップラー効果の公式から得られる関係式

$\dfrac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=1+\dfrac{\beta h}{c^2}$ の $\dfrac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}$ を $\dfrac{\Delta t_{\mathrm{A}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}$ に，β を $-\beta$ にすることにより，

$\dfrac{\Delta t_{\mathrm{A}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}=1-\dfrac{\beta h}{c^2}$ という関係式が得られる。

$$\therefore \frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=\frac{1}{1-\dfrac{\beta h}{c^2}}\approx 1+\frac{\beta h}{c^2}$$

解説

重力加速度が下向きでその大きさ β が一定と見なせる領域内は，等価原理から，

図 1 の加速度 a を β に置き換えた箱の中と等価である。

ここで，B を光源，A を検出器とすると，

光源は速さで検出器から遠ざかり，検出器は速さ v_{A} で光源に近づくことになるから，

光源の振動数 f_{B} と受け取る光の振動数 f_{A} の比は，ドップラー効果の公式より，

$$\frac{f_{\rm A}}{f_{\rm B}}=\frac{c+v_{\rm A}}{c+v_{\rm B}}=\frac{1+\frac{v_{\rm A}}{c}}{1+\frac{v_{\rm B}}{c}}=\frac{1+\frac{v_{\rm A}}{c}}{1-\left(-\frac{v_{\rm B}}{c}\right)}=\left(1-\frac{v_{\rm B}}{c}\right)\left(1+\frac{v_{\rm A}}{c}\right)=1-\frac{v_{\rm B}-v_{\rm A}}{c}$$

$v_{\rm A}=v_{\rm B}+\beta t$， $t=\frac{h}{c}$ より， $v_{\rm B}-v_{\rm A}=-\frac{\beta h}{c}$

また， $\frac{f_{\rm A}}{f_{\rm B}}=\frac{\Delta t_{\rm B}}{\Delta t_{\rm A}}$

よって， $\frac{\Delta t_{\rm B}}{\Delta t_{\rm A}}=1+\frac{\beta h}{c^2}$

いずれにしても $\frac{\Delta t_{\rm B}}{\Delta t_{\rm A}}=1+\frac{\beta h}{c^2}$， すなわち $\Delta t_{\rm B}=\left(1+\frac{\beta h}{c^2}\right)\Delta t_{\rm A}$ が成り立つことは,

A での X 年の経過と B での $\left(1+\frac{\beta h}{c^2}\right)X$ 年の経過が対応することを意味する。

(3)

$\boxed{\text{こ}}$ βh $\boxed{\text{さ}}$ $\frac{\phi_{\rm B}-\phi_{\rm A}}{c^2}$ $\boxed{\text{し}}$ $-\frac{GMm}{r}$ $\boxed{\text{す}}$ $-gR$ $\boxed{\text{せ}}$ $\frac{gRL}{c^2(R+L)}$

解説

$\boxed{\text{こ}}$

A と B の重力の位置エネルギー差は $m\beta h$ だから， $m\phi_{\rm B}-m\phi_{\rm A}=m\beta h$ $\therefore \phi_{\rm B}-\phi_{\rm A}=\beta h$

$\boxed{\text{さ}}$

$\beta h=\phi_{\rm B}-\phi_{\rm A}$ より,

$$\frac{\Delta t_{\rm B}}{\Delta t_{\rm A}}=1+\frac{\beta h}{c^2}$$
$$=1+\frac{\phi_{\rm B}-\phi_{\rm A}}{c^2}$$

$\boxed{\text{し}}$

無限遠を基準とする万有引力の位置エネルギーの公式より $-\frac{GMm}{r}$

または,

無限遠から地球の中心からの距離 r の位置まで粒子を移動させる外力の仕事の大きさは

$$\left|\int_r^\infty \frac{GMm}{x^2}dx\right|=\lim_{a\to\infty}\left|\int_r^a \frac{GMm}{x^2}dx\right|=\lim_{a\to\infty}\left[-\frac{GMm}{x}\right]_r^a=\frac{GMm}{r}$$

このとき外力がする仕事は負だから,

無限遠を基準とする粒子の位置エネルギーは $-\frac{GMm}{r}$

す

$$\phi_A = -\frac{GM}{R} = -\frac{GM}{R^2}\cdot R = -gR$$

せ

$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1+\frac{\phi_B-\phi_A}{c^2} = 1+\frac{1}{c^2}\left\{-g\frac{R^2}{R+L}-(-gR)\right\} = 1+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{-gR^2+gR(R+L)}{R+L} = 1+\frac{gRL}{c^2(R+L)}$$

問 2

$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_A}\cdot\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\cdot\frac{\Delta t_3}{\Delta t_2}\cdots\cdot\frac{\Delta t_{N-1}}{\Delta t_{N-2}}\cdot\frac{\Delta t_B}{\Delta t_{N-1}}$$
$$=\left(1+\frac{\phi_1-\phi_A}{c^2}\right)\left(1+\frac{\phi_2-\phi_1}{c^2}\right)\left(1+\frac{\phi_3-\phi_2}{c^2}\right)\cdots\left(1+\frac{\phi_{N-1}-\phi_{N-2}}{c^2}\right)\left(1+\frac{\phi_B-\phi_{N-1}}{c^2}\right)$$
$$=1+\frac{\phi_1-\phi_A}{c^2}+\frac{\phi_2-\phi_1}{c^2}+\frac{\phi_3-\phi_2}{c^2}+\cdots+\frac{\phi_{N-1}-\phi_{N-2}}{c^2}+\frac{\phi_B-\phi_{N-1}}{c^2}\quad\left(\because\left|\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{c^2}\right|<<1\right)$$
$$=1+\frac{\phi_B-\phi_A}{c^2}$$

(4)

そ $-\dfrac{gR^2}{2c^2(R+L)}$

解説

そ

人工衛星の軌道中心方向の運動方程式 $m\cdot\dfrac{v^2}{R+L}=mg\left(\dfrac{R^2}{R+L}\right)^2$ より， $v^2=\dfrac{gR^2}{R+L}$

よって，

$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1-\frac{v^2}{2c^2} = 1-\frac{gR^2}{2c^2(R+L)}$$

問 3

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}\cdot\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}$$
$$=\left\{1+\frac{gRL}{c^2(R+L)}\right\}\left\{1-\frac{gR^2}{2c^2(R+L)}\right\}$$
$$\approx 1+\frac{gRL}{c^2(R+L)}-\frac{gR^2}{2c^2(R+L)}$$
$$=1+\frac{gR(2L-R)}{2c^2(R+L)}\quad・・・(答)$$

$$\frac{t_{\mathrm{B}}}{t_{\mathrm{A}}}=1+\frac{9.8\times\cdot 6.0\times 10^6\times\cdot 3.0\times 10^7}{(3.0\times 10^8)^2(6.0\times 10^6+3.0\times 10^7)}$$
$$=1+\frac{9.8\times 6.0\times 3.0}{9.0\times 36}\times 10^{-9}$$
$$\approx 1+5.44\times 10^{-10}$$

$$\therefore\frac{t_{\mathrm{B}}}{t_{\mathrm{A}}}=1+5.4\times 10^{-10}\quad・・・(答)$$

$$\frac{t_{\mathrm{C}}}{t_{\mathrm{B}}}=1-\frac{9.8\times\cdot(6.0\times 10^6)^2}{2\cdot(3.0\times 10^8)^2(6.0\times 10^6+3.0\times 10^7)}$$
$$=1-\frac{9.8\times 36}{2\times 9.0\times 36}\times 10^{-10}$$
$$\approx 1-5.44\times 10^{-11}$$

$$\therefore\frac{t_{\mathrm{C}}}{t_{\mathrm{B}}}=1-5.4\times 10^{-11}\quad・・・(答)$$

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}\cdot\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}$$
$$=(1+5.44\times 10^{-10})(1-5.44\times 10^{-11})$$
$$\approx 1+5.44\times 10^{-10}-5.44\times 10^{-11}$$
$$\approx 1+4.89\times 10^{-10}$$

$$\therefore\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=1+4.9\times 10^{-10}\quad・・・(答)$$